

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI
*FLYING FOX***

SKRIPSI

**OLEH
SOIMATUL MAKFIROH
NIM. 16610051**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI
*FLYING FOX***

SKRIPSI

**OLEH
SOIMATUL MAKFIROH
NIM. 16610051**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI
*FLYING FOX***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh:
Soimatul Makfiroh
NIM: 16610051**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

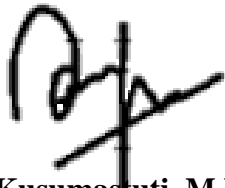
**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI
*FLYING FOX***

SKRIPSI

**Oleh:
Soimatul Makfiroh
NIM: 16610051**

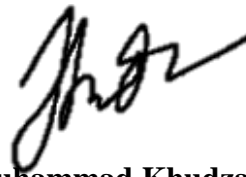
**Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 2 Desember 2020**

Dosen Pembimbing I



**Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
NIP 19770521 200501 2 004**

Dosen Pembimbing II



**Muhammad Khudzaifah, M.si
NIP 19900511 201608 011**

**Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika**



**Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP 19650414 200312 1 001**


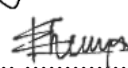
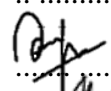

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI DAWAI
FLYING FOX**

SKRIPSI

**Oleh
Soimatul Makfiroh
NIM. 16610051**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 2 Desember 2020

Penguji Utama	: Juhari, M.Si
Ketua Penguji	: Dr. Heni Widayani, M.Si
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si


.....

.....

.....

.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Nama : Soimatul Makfiroh

NIM : 16610051

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying*

Fox

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 April 2021
Yang membuat pernyataan



Soimatul Makfiroh
NIM. 16610048

MOTO

“Semakin banyak tahu, harus semakin banyak memberi tahu”

“Ilmu tanpa kerendahan hati adalah sia-sia”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Almh. Eyang putri tercinta Ibu Siamah, Bapak Suprpto, Ibu Muriati, Adik-adik tersayang Indria dan Zakia serta kawan dan sahabat-sahabat yang selalu memberikan semangat dan dukungan tulus kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
2. Muhammad Khudzaifah, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
3. Juhari, M.Si selaku penguji utama yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingan dalam proses pengerjaan agar skripsi ini menjadi lebih baik.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si selaku ketua penguji yang telah memberikan banyak ilmu, dan nasihat baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripai ini dengan baik.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, 15 Desember 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	18
1.2 Rumusan Masalah	21
1.3 Tujuan Penelitian	22
1.4 Manfaat Penelitian	22
1.5 Batasan Masalah.....	22
1.6 Metode Penelitian.....	22
1.7 Sistematika Penulisan	23
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Model Matematika Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i>	25
2.2 Kajian Model Matematika Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i>	29
2.3 Analisis Kestabilan.....	33
2.4 Potret Fase	37
2.5 Kajian Keagamaan	38
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Reduksi Model Matematika Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i>	40
3.2 Linierisasi Model Matematika Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i>	42
3.3 Analisis Kestabilan.....	43
3.3.1 Analisis Titik Keseimbangan	43
3.3.1.1 analisis titik tetap persamaan 3.3	43
3.3.1.2 analisis titik tetap persamaan 3.4	44
3.3.1.3 analisis titik tetap persamaan 3.5	44
3.3.1.4 analisis titik tetap persamaan 3.7	45

3.3.2 Analisis Nilai Eigen	46
3.3.2.1 analisis nilai eigen persamaan 3.3 dan 3.4.....	46
3.3.2.2 analisis nilai eigen persamaan 3.5 dan 3.7.....	48
3.4 Potret Fase.....	50
3.3 Kajian Integrasi	53
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	55
4.2 Saran.....	55
DAFTAR RUJUKAN	56
LAMPIRAN.....	58
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	61

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1. Peregangan pada Dawai <i>Flying fox</i>	28
Gambar 2. 2. (i) Node Spiral Tidak Stabil, (ii) Node Stabil Asimtotik, (iii) Node Center Stabil, (iv) Node Tidak Stabil Asimtotik, (v) Node Spiral Stabil, (vi) Node Saddle Tidak Stabil, (vii) Node Tidak stabil, (viii) Node Stabil Asimtotik (Dawkins, 2007)	36
Gambar 3. 1 Potret fase perubahan kecepatan lendutan dawai terhadap waktu. ...	51
Gambar 3. 2 Potret fase perubahan kecepatan sudut dawai terhadap waktu.	53

DAFTAR SIMBOL

$y(t)$:	Lendutan dawai bergantung pada variabel t
$\frac{dy(t)}{dt}$:	Kecepatan vibrasi dawai bergantung pada variabel t
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$:	Percepatan vibrasi dawai bergantung pada variabel t
θ	:	Sudut dawai bergantung pada variabel t
$\frac{d\theta}{dt}$:	Kecepatan sudut dawai bergantung pada variabel t
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$:	Percepatan sudut dawai bergantung pada variabel t
t	:	Variabel bebas (waktu)
l	:	Panjang dawai <i>flying fox</i>
m_b	:	Massa benda yang meluncur pada dawai <i>flying fox</i>
m_d	:	Massa dawai <i>flying fox</i>
E	:	Modulus elastisitas dawai <i>flying fox</i>
μ_k	:	Koefisien gaya gesek dawai <i>flying fox</i> dengan <i>sling</i> baja
b	:	Konstanta yang mewakili bentuk benda yang meluncur pada dawai <i>flying fox</i>
d	:	Konstanta yang mewakili bentuk dawai <i>flying fox</i>
η	:	Koefisien kekentalan (viskositas) dinamis zat alir
g	:	Percepatan gravitasi
f	:	Frekuensi gerak dawai <i>flying fox</i>
λ	:	Nilai eigen
v	:	Kecepatan benda meluncur pada dawai <i>flying fox</i>
A	:	Luas penampang dawai <i>flying fox</i>
N	:	Gaya normal benda

ABSTRAK

Makfiroh, Soimatul. 2021. **Analisis Kestabilan Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: Analisis Kestabilan, Lendutan Dawai, Model Matematika *Flying Fox*, Sudut Dawai.

Penelitian ini membahas tentang analisis kestabilan model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Kestabilan yang dimaksud ialah kestabilan dari perubahan sudut dawai dan perubahan lendutan dawai saat benda diluncurkan di sepanjang *flying fox*. Model tersebut telah dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk (2017) dan telah divalidasi oleh Sari (2018), sehingga penelitian ini merupakan penelitian lanjutan yang bertujuan untuk mengetahui perilaku atau kestabilan pada model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan metode dinamik dimana kestabilan suatu sistem dapat dilihat dari nilai eigen dan potret fasenya. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diperoleh nilai eigen sebagai berikut: $\lambda_1 = -0,005 + 0,14565i$, $\lambda_2 = -0,005 - 0,14565i$, $\lambda_3 = -0,005 + 1,01908292i$, dan $\lambda_4 = -0,005 - 1,01908292i$. Nilai eigen kompleks dengan bagian bilangan real bernilai negatif menunjukkan bahwa perilaku sudut dan lendutan dawai tersebut stabil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model tersebut terbukti dapat merepresentasikan keadaan yang sebenarnya di dunia nyata. Nilai eigen kompleks menghasilkan grafik potret fase berbentuk spiral dengan vektor eigen yang mengarah menuju titik setimbangnya. Hal ini menunjukkan bahwa jenis kestabilannya bersifat stabil asimtotik. Pada penelitian ini massa benda yang meluncur di atas *flying fox* dianggap konstan, untuk itu perlu adanya kajian lebih lanjut tentang analisis kestabilan model matematika vibrasi dawai *flying fox* dengan variasi massa beban

ABSTRACT

Makfiroh, Soimatul. 2021. **Stability Analysis of the Flying Fox String Vibration Mathematical Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Flying Fox, Mathematical Model, Stability Analysis, String Angle, String Deflection.

This research discusses the analysis of the stability of the flying fox vibration mathematical model. The stability that is defined is the stability of the change in the angle of the strings and the change in deflection of the strings when objects are launched along the flying fox. This model has been constructed by Kusumastuti, et al (2017) and has been validated by Sari (2018), so that this research is a follow-up study which aims to determine the behavior or stability of the flying fox string vibration mathematical model. Stability analysis is carried out using a dynamic method where the stability of a system can be seen from the eigenvalues and its phase portraits. Based on the research that has been done, the following eigenvalues were obtained: $\lambda_1 = -0,005 + 0,14565i$, $\lambda_2 = -0,005 - 0,14565i$, $\lambda_3 = -0,005 + 1,01908292i$, and $\lambda_4 = -0,005 - 1,01908292i$. The complex eigenvalues with a negative part of the real number indicate that the angle and deflection behavior of the strings is stable. So it can be concluded that the model is proven to represent the real situation. The complex eigenvalues produce a spiral-shaped phase portrait graph with the eigenvectors pointing towards the equilibrium point. This indicates that the type of stability is asymptotically stable. In this research, the mass of objects gliding on the flying fox is considered constant. Consequently it is necessary to have further research on the stability analysis of the flying fox string vibration mathematical model with variations in load mass.

مستخلص البحث

مغفرة، صائمة 2021 . تحليل الاستقرار للنموذج الرياضي اهتزاز السلسلة الثعلب الطائر. البحث الجامعي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولنا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (1) أري كسومستوتي، الماجستير (2) مُجد خزيفة، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: تحليل الاستقرار، انحراف السلسلة، نموذج الرياضيات ثعلب الطائر، وهجة السلسلة.

يبحث هذا البحث عن تحليل الاستقرار للنموذج الرياضي اهتزاز السلسلة الثعلب الطائر. الإستقرار هو استقرار التغيرات في تفتق سلسلة والتغيير في انحراف السلسلة عند إطلاق الكائن لدعم الثعلب الطائر. قامت كسومستوتي (2017) بذلك النموذج وتمت التحقق من صحته بساري (2018) لذلك يكون هذا البحث بحثا متابعا يهدف إلى تعريف سلوك أو استقرار للنموذج الرياضي اهتزاز السلسلة الثعلب الطائر. يتم إجراء تحليل الاستقرار باستخدام طريقة ديناميكية حيث رؤية الاستقرار النظام من قيمة الذاتية و صور الطور. بناء على البحث الذي تم إجراؤه، يتم الحصول على القيم الذاتية التالية: $-0,005 + 0,14565 = 0,14565 - 0,005 = 0,14565$ ، $0,005 + 1,01908292 = 1,01908292 - 0,005$. الجزء السالب من الرقم الحقيقي يشير أن السلوك وهجة و انحراف السلسلة هي مستقر. لذلك يمكن النموذج تم إثباته يمثل حالة الحقيقية في العالم الحقيقي. وهذا يدل على أن نوع الاستقرار مقارنة مستقرة. يعتبر هذا البحث كتلة الأشياء التي تنزلق على الثعلب الطائر ثابتة، لذلك من الضروري إجراء دراسة إضافية حول تحليل الاستقرار للنموذج الرياضي اهتزاز السلسلة الثعلب الطائر كتلة الحمل.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Flying fox merupakan salah satu wahana permainan yang sering ditemui di taman rekreasi. Wahana ini banyak digemari karena dapat memacu hormon adrenalin. Namun wahana menyenangkan ini bukan tanpa resiko, seperti yang telah dipaparkan oleh Billcok, dkk (2015) dalam penelitiannya “*Zipline-Related injuries treated in US Eds, 1997-2012*” menyelidiki tentang epidemiologi cedera akibat wahana *flying fox* di Amerika Serikat dari tahun 1997 hingga 2012. Berdasarkan data yang diambil dari Database Sistem Pengawasan Cedera Elektronik Nasional, diperkirakan terdapat 16.850 kasus cedera akibat *flying fox* yang dirawat di ED AS. Tingkat cedera tahunan per 1 juta populasi meningkat sebesar 52,3% dan 77,3% cedera yang terjadi dikarenakan korban terjatuh saat menggunakan wahana *flying fox*. Ditinjau dari lokasi terjadinya cedera, 30,8% terjadi di lingkungan perumahan dan 69,2% terjadi di tempat umum. Peningkatan pesat cedera akibat *flying fox* menunjukkan perlunya pedoman dan peraturan keselamatan tambahan agar memenuhi standar keamanan saat wahana tersebut digunakan.

Standar keamanan dalam bermain *flying fox* dapat ditinjau dari berbagai aspek, salah satunya ialah dengan melakukan pemeriksaan secara berkala komponen struktur wahana. Guo, dkk (2021) dalam penelitiannya “*Reliability Analysis of Zipline Project in A Mountainous Eco-tourism Scenic Spot*” menjelaskan bahwa tegangan kabel dan menara akan meningkat karena beban manusia, sehingga perpindahan komponen utamapun juga akan ikut meningkat.

Oleh karena itu, setelah *flying fox* digunakan perlu dilakukan pemeriksaan berkala terhadap komponen struktur utama, pemeriksaan tersebut antara lain: memperhatikan keausan kabel bantalan utama, kemudian rutin membuat catatan perawatan, dan memperkuat pemantauan untuk mencegah terjadinya kecelakaan.

Kecelakaan dalam wahana *flying fox* tentu saja dapat diminimalisir dengan cara mekonstruksi pembangunan wahana tersebut seefisien mungkin. Pembangunan yang efisien dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan ilmiah yakni dengan pemodelan matematika. Prayudi (2006) mengatakan pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau masalah pada dunia nyata dalam pernyataan matematika, sehingga dapat memahami masalah dunia nyata dengan tepat. Dengan kata lain model matematika merupakan suatu usaha untuk menggambarkan fenomena yang terjadi ke dalam bentuk rumus matematika sehingga dapat dipahami, dipelajari, serta dilakukan perhitungan dengan mudah.

Model matematika dari wahana *flying fox* sendiri telah dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk (2017) dalam penelitiannya “Konstruksi Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*” dibahas mengenai proses pembentukan model matematika berdasarkan fenomena yang terjadi pada saat *flying fox* bekerja. Terdapat dua variabel yang terlibat dalam model tersebut yakni panjangnya lendutan dawai saat berosilasi (y) dan besarnya sudut dawai saat berosilasi (θ). Kedua variabel tersebut terikat terhadap waktu yang ditentukan. Dalam mekonstruksi suatu model memperhatikan parameter-parameter sebagai berikut: massa dari beban yang menggantung (m_b), massa dari dawai yang dipakai (m_d), panjang (L) dan luas penampang dawai (A), koefisien sling baja (k) dan koefisien

gaya gesek antara sling baja dengan dawai (μ_k), besarnya gaya normal (N) dan gaya gravitasi (g), frekuensi dari osilasi lendutan dawai (δ_1) dan osilasi sudut (δ_2), kekentalan udara (η), kecepatan benda meluncur (v), serta sebuah besaran yang mewakili bentuk benda yang sedang meluncur (b). Selain variabel dan parameter-parameter tersebut terdapat hukum-hukum fisika dan asumsi-asumsi dasar terkait vibrasi dawai *flying fox* yang digunakan sehingga dapat dibentuk sistem persamaan diferensial biasa orde dua non-linier yang disebut sebagai model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Menurut Pagalay (2009) suatu model yang telah dikonstruksikan harus melalui tahap uji validasi berdasarkan kaidah-kaidah teori yang berlaku. Suatu model dikatakan valid apabila telah memenuhi syarat validasi, yang artinya model tersebut sudah relevan dan dapat mewakili fakta yang terjadi.

Uji validasi dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satunya ialah dengan membandingkan hasil antara solusi numerik dan solusi analitik, seperti yang telah dilakukan oleh Sari (2018) dalam penelitiannya “Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*”. Solusi analitik dicari menggunakan metode karakteristik, sedangkan solusi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Uji validasi dilakukan hanya dengan mengamati perilaku grafik berdasarkan kemiripan grafiknya saja sehingga uji validasi ini dirasa belum cukup untuk menunjukkan kevalidan model. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian uji validasi tersebut menggunakan metode lain yang belum pernah dikembangkan sebelumnya yakni analisis kestabilan model menggunakan kaidah dinamik.

Kestabilan suatu model dapat ditetapkan dengan mengamati nilai eigen dan atau potret fase yang dihasilkan. Apabila nilai eigen positif maka model matematika tersebut tidak stabil atau tidak valid, sebaliknya apabila nilai eigen negatif maka model matematika tersebut stabil atau valid yang berarti sesuai dengan keadaan sebenarnya.

Kata stabil atau kestabilan dapat juga merujuk pada kata seimbang atau keseimbangan. Keseimbangan sendiri telah banyak dibahas di dalam Al-Quran. Salah satunya terdapat pada surat Ar-Rahman ayat 7 sampai dengan ayat 9 yakni: *Dan langit telah ditinggikan-Nya dan Dia ciptakan keseimbangan (7), agar kamu jangan merusak keimbangan itu (8), dan tegakkanlah keseimbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi keseimbangan itu (9)*. Dalam ayat yang diturunkan-Nya tersebut dijelaskan bahwa Allah SWT menciptakan dunia dan seisinya dengan penuh perhitungan dan presisi, sehingga segalanya menjadi seimbang. Sebagai manusia hendaklah tidak merusak keseimbangan yang telah diciptakan oleh Allah SWT. Keseimbangan atau kestabilan dapat ditemukan dimanapun termasuk dalam kajian model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang dianalisis kestabilannya pada penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana analisis kestabilan model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisis kestabilan dari model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini ialah:

1. Bagi Peneliti

Penelitian ini dapat menambah pengetahuan dan wawasan tentang analisis kestabilan model matematika vibrasi dawai *flying fox* menggunakan metode dinamik.

2. Bagi Pembaca

Penelitian ini dapat dijadikan bahan rujukan pada bidang mata kuliah pemodelan matematika, khususnya pada sistem dinamik.

3. Bagi Lembaga

Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan matematika, khususnya pada bidang analisis kestabilan, sehingga dapat penelitian ini dapat dijadikan rujukan tambahan sebagai bahan kepustakaan.

1.5 Batasan Masalah

Untuk mendekati sasaran yang di harapkan, maka diperlukan pembatasan masalah yakni model matematika yang digunakan ialah model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk (2017). Model tersebut ialah sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. Mereduksi sistem persamaan diferensial biasa orde dua menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu.
2. Melakukan linierisasi pada persamaan non-linier.
3. Menganalisis titik tetap.
4. Menganalisis nilai eigen.
5. Menganalisis hasil simulasi potret fase model.
6. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan penelitian ini secara umum terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini disajikan kajian-kajian pustaka yang menjadi landasan dan dasar teori dalam pembahasan analisis kestabilan model matematika

vibrasi dawai *flying fox*, yang meliputi kajian model matematika vibrasi dawai *flying fox*, analisis kestabilan, dan potret fase.

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini disajikan hasil penelitian dan pembahasan, yang meliputi model matematika untuk vibrasi dawai *flying fox*, analisis perilaku model vibrasi dawai *flying fox*, dan potret fase dari hasil simulasi dan interpretasi model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

Bab IV Penutup

Pada bab ini terdapat kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dibahas dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*

Kusumastuti, dkk (2017) telah merumuskan model matematika untuk vibrasi dawai *flying fox* dalam bentuk sistem persamaan differensial biasa orde dua, yaitu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t$$

Model diatas memiliki dua variabel terikat yakni (y) dan (θ) dan satu variabel bebas yaitu (t). Proses formulasi model matematika vibrasi dawai *flying fox* tersebut memperhatikan parameter-parameter sebagai berikut:

1. Panjang dawai *flying fox* (L), ialah jarak antara dua buah penyangga dan dihubungkan oleh dawai *flying fox*. Satuan panjang dawai *flying fox* adalah meter (m).
2. Massa benda (m_b), ialah besaran massa dari objek yang meluncur pada dawai *flying fox*. Satuan massa benda adalah kilogram (Kg).
3. Massa dawai *flying fox* (m_d), ialah besaran massa dawai yang berbahan kawat baja. Satuan massa dawai *flying fox* adalah kilogram (Kg).
4. Modulus elastisitas dawai *flying fox* (E), ialah konstanta yang menyatakan ukuran kelenturan dawai *flying fox* berbahan kawat baja. Satuan modulus

elastisitas dawai *flying fox* adalah N/m^2 . Besar modulus elastisitas dawai *flying fox* yang berbahan kabel baja adalah $200 \times 10^9 N/m^2$.

5. Koefisien gaya gesek dawai *flying fox* dengan *sling* baja (μ_k), ialah konstanta yang menyatakan besaran interaksi dawai *flying fox* dengan *sling* baja. Koefisien gaya gesek kinetis antara baja dengan baja adalah 0,57.
6. Konstanta (b), ialah besaran yang mewakili bentuk benda yang bergesekan dengan udara. Dalam penelitian ini, benda diasumsikan sebagai sistem bundar, sehingga konstanta $b = 6\pi r_b$, dengan r_b adalah jari-jari benda. Semakin besar jari-jari benda, maka semakin besar pula gaya hambatnya dengan fluida (udara).
7. Konstanta (d), ialah besaran yang mewakili bentuk dawai yang bergesekan dengan udara. Konstanta d dapat dicari dengan $d = 6\pi r_d$, dengan r_d merupakan jari-jari dawai *flying fox*.
8. Koefisien viskositas (η), ialah besaran yang menunjukkan tingkat kekentalan fluida atau zat alir. Dalam penelitian ini, jenis fluida atau zat alir yang dipertimbangkan adalah udara dengan koefisien viskositas sebesar $0,000018 Ns/m^2$.
9. Percepatan gravitasi (g), ialah percepatan yang diakibatkan oleh gaya tarik bumi. Ketentuan percepatan gravitasi adalah $9,8 m/s^2$.
10. Frekuensi gerak dawai *flying fox* (f), ialah jumlah kompresi yang melewati titik dawai *flying fox*. Satuan frekuensi gerak dawai *flying fox* adalah Hz atau $1/s$.

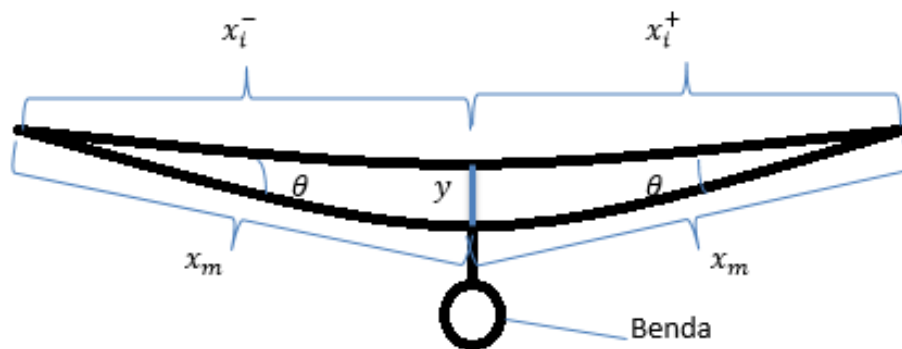
11. Panjang gelombang dawai *flying fox* (λ), ialah jarak antara satuan berulang dari pola gelombang dawai *flying fox* yang tersusun atas satu lembah dan satu bukit. Satuan panjang gelombang dawai *flying fox* adalah meter (m).
12. Kecepatan benda meluncur pada dawai *flying fox* (v) dengan satuan m/s .
13. Luas penampang dawai *flying fox* (A) dengan satuan m^2 . Dawai *flying fox* biasanya berdiameter $10,5\text{ mm} = 0,0105\text{ m}$, sehingga besar jari-jarinya adalah $0,00525\text{ m}$. Dengan demikian luas penampang dawai *flying fox* adalah sebesar $A = \pi r^2 = 8,7 \times 10^{-5}\text{ m}$, dengan $\pi = 3,14$.

Selanjutnya variabel-variabel yang digunakan terbagi menjadi dua macam, yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang telah dikonstruksi bergantung pada waktu t . Dengan demikian t berperan sebagai variabel bebas. Sedangkan untuk variabel terikatnya adalah sebagai berikut:

1. Lendutan dawai *flying fox* (y), merupakan besar simpangan gerak osilasi yang terjadi ketika benda meluncur pada dawai *flying fox*. Satuan lendutan adalah meter (m). Lendutan maksimum dawai *flying fox* berbahan kabel baja adalah $-2,042 \times 10^{-10}\text{ m}$ untuk massa maksimum benda 50 Kg . Tanda negatif menandakan bahwa lendutan mengarah ke bawah.
2. Kecepatan gerak dawai *flying fox* pada saat berosilasi $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ dengan satuan m/s .
3. Percepatan gerak dawai *flying fox* pada saat berosilasi $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ dengan satuan m/s^2 .

4. Besar sudut (θ), merupakan sudut dawai *flying fox* yang terbentuk pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox* dari posisi setimbangnya.
5. Kecepatan sudut dawai *flying fox* yang terbentuk pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox* ($\frac{d\theta}{dt}$) dengan satuan $m\ rad/s$.
6. Percepatan sudut dawai *flying fox* yang terbentuk pada saat benda meluncur pada dawai *flying fox* ($\frac{d^2\theta}{dt^2}$) dengan satuan $m\ rad/s^2$.

Kusumastuti, dkk (2017) mengatakan dawai *flying fox* adalah dawai kaku dimana lendutan setimbangnya berada pada sepanjang sumbu x , dan getarannya berpindah secara vertikal searah sumbu y yang kemudian merambat secara horizontal searah sumbu x . Ketika benda tepat berada di tengah dawai, maka dawai berada pada posisi setimbang dan terjadi peregangan seperti pada gambar 2.1 berikut:



Gambar 2. 1. Peregangan pada Dawai *Flying fox*

Pada Gambar 2.1 menunjukkan bahwa ketika benda berada tepat di tengah dawai panjang dawai disebelah kanan benda sama dengan panjang dawai disebelah kiri benda. Panjang dawai sisi kanan dimisalkan $x_l^+ = \frac{1}{2}l$ dan panjang dawai sisi kiri dimisalkan $x_l^- = -\frac{1}{2}l$.

2.2 Kajian Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*

Menurut Kartono (2012), model matematika adalah suatu cara sederhana untuk menerjemahkan suatu masalah atau fenomena alam ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi. Secara umum, model matematika dapat ditulis ke dalam bentuk persamaan diferensial. Salah satu contoh fenomena alam yang telah dimodelkan ialah fenomena vibrasi dawai pada *flying fox*. Fenomena tersebut telah dikonstruksi atau diterjemahkan ke dalam model matematika oleh Kusumastuti, dkk (2017). Model tersebut ialah sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d} \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t \quad (2.2)$$

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Purcell, 1987). Sehingga pada persamaan (2.1) dan (2.2) dapat dilihat bahwa terdapat turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui berupa variabel tak bebas (y) dan (t) yang bergantung terhadap variabel bebas (t). Oleh sebab itu persamaan (2.1) dan (2.2) dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial. Persamaan diferensial sendiri dapat dituliskan ke dalam dua bentuk, yaitu bentuk eksplisit dan bentuk implisit sebagai berikut:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad \text{Bentuk Eksplisit}$$

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0 \quad \text{Bentuk Implisit}$$

Suatu persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua berdasarkan jumlah variabel bebasnya. Disebut persamaan diferensial biasa apabila memiliki satu variabel bebas, dan disebut persamaan diferensial parsial apabila memiliki lebih dari satu variabel bebas. Dengan demikian persamaan (2.1) dan (2.2) dapat disebut persamaan diferensial biasa karena hanya memiliki satu variabel bebas yakni (t) . Sedangkan variabel tak bebasnya berjumlah dua yaitu (y) dan (θ) sehingga persamaan (2.1) dan (2.2) secara matematis dapat disebut sebagai persamaan diferensial biasa dua variabel.

Menurut Ross (1984) pangkat tertinggi (derajat) suatu turunan yang muncul dalam persamaan diferensial disebut orde dari persamaan diferensial tersebut. Pada persamaan (2.1) variabel (y) diturunkan sebanyak dua kali terhadap t dan pada persamaan (2.2) variabel (θ) juga diturunkan sebanyak dua kali terhadap t , yang artinya kedua persamaan tersebut memiliki pangkat tertinggi dua. Sehingga dapat disebut sebagai persamaan diferensial biasa dua variabel orde dua.

Persamaan (2.1) disebut sebagai persamaan diferensial linier. Hal ini sejalan dengan penjelasan Ross (1984) bahwa persamaan diferensial linier pada orde n , y sebagai variabel tak bebas, dan t sebagai variabel bebas dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_0(t)y - g(t) = 0$$

Atau

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t)$$

Dimana $a_0 \neq 0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ disebut sebagai koefisien persamaan diferensial. Dan fungsi $g(t)$ disebut dengan fungsi input atau unsur tak homogen. Apabila fungsi $g(t)$ disebut input maka solusi dari persamaan diferensial $y(t)$ disebut output. Suatu persamaan diferensial dikatakan homogen bila ruas kanan $g(t)$ bernilai 0. Begitu pula sebaliknya dikatakan non-homogen

Pada persamaan (2.2) disebut sebagai persamaan diferensial non-linier, karena terdapat suku non-linier yang berada pada fungsi trigonometri $\left(\frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta}\right)$. Berdasarkan penjelasan Ross (1984) mengatakan bahwa persamaan diferensial $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ merupakan persamaan diferensial non-linier jika F memenuhi salah satu sifat berikut:

1. Variabel-variabel terikat dan turunannya lebih dari satu.
2. Mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya atau turunan satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel terikat dengan turunan.
3. Variabel terikatnya merupakan fungsi transenden.

Diberikan persamaan (2.1) dan (2.2) sebagai berikut

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t$$

Bila persamaan di atas diubah dengan mengumpulkan variabel y dan θ ruas kiri maka:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta_1 \frac{dy}{dt} + \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} = \frac{m_b g}{m_d} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \delta_2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) = 0,05 \sin t \quad (2.4)$$

Persamaan (2.3) dan (2.4) merupakan contoh dari persamaan nonhomogen karena $g(t)$ bernilai $\frac{m_b g}{m_d} \neq 0$ dan $0,05 \sin t \neq 0$.

Boyce dan Di Prima (2012) mengatakan bahwa kumpulan persamaan diferensial biasa yang mempunyai hubungan simultan disebut sistem persamaan diferensial biasa. Moubrani (2014) menambahkan bila terdapat hubungan simultan antar persamaan maka dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut saling bertautan (*couple*), sedangkan dikatakan tidak bertautan (*uncouple*) bila antar persamaan tidak memiliki hubungan yang spesifik. Dengan demikian persamaan (2.1) dan (2.2) disebut sebagai persamaan diferensial biasa yang bersifat *uncouple* karena keduanya tidak memiliki relasi yang spesifik. Oleh karena itu penyelesaiannya dilakukan secara terpisah.

2.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui kestabilan suatu sistem, dalam hal ini sistem yang dimaksud ialah sistem persamaan diferensial pada suatu model matematika. Analisis kestabilan dapat membantu mengetahui valid atau tidaknya suatu model, sehingga dapat dilakukan tindakan lebih lanjut. Menurut Boyce dan Di Prima (2000), analisis kestabilan dapat ditentukan dengan melakukan analisis pada titik tetap, kemudian menentukan jenis kestabilannya melalui nilai eigen yang dihasilkan dari persamaan.

Titik tetap merupakan suatu titik dimana pada posisi tersebut tidak terjadi perubahan apapun, secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Dengan f dan g merupakan fungsi kontinu dari x dan y . Titik tetap sistem tersebut adalah titik (x^*, y^*) dari (x, y) , apabila diperoleh $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ sedemikian hingga $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang sehingga titik (x^*, y^*) tersebut dapat disebut sebagai titik tetap.

Sedangkan nilai eigen menurut Anton dan Rorres (2004) ialah suatu skalar λ dinamakan nilai eigen dari A jika A adalah matriks $n \times n$ dengan suatu vektor tak nol x di dalam R^n yang dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x . Secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$Ax = \lambda x$$

Dalam hal ini dikatakan x adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ untuk mencari nilai eigen maka persamaan $Ax = \lambda x$ ditulis ulang dalam bentuk $Ax = \lambda Ix$, dimana I adalah matriks identitas $n \times n$. Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak nol sedemikian hingga $\det(A - \lambda I)x = 0$.

Suatu sistem dikatakan stabil jika terdapat peralihan yang menurun menuju nol terhadap pertambahan waktu. Hal ini menunjukkan bahwa jika nilai eigen

yang dihasilkan mempunyai bagian *real* yang positif, maka mengakibatkan perubahan akan bertambah besar terhadap pertambahan waktu. Dengan kata lain, titik tetap dari suatu sistem persamaan diferensial dikatakan stabil jika semua bagian *real* dari nilai eigen matriks *Jacobian* bernilai negatif (Tu, 1994).

Menurut Robinson (2004) berikut ialah sifat-sifat kestabilan berdasarkan nilai eigen. Diberikan persamaan diferensial linier $\dot{x} = Ax$:

1. Jika semua nilai eigen λ dari A merupakan bilangan riil negatif, maka titik asal bersifat stabil asimtotik.
2. Jika salah satu nilai eigen λ_1 merupakan bilangan riil positif dan nilai eigen lainnya λ_2 merupakan bilangan riil negatif maka titik asal bersifat tidak stabil.
3. Dalam dua dimensi, jika nilai eigen merupakan imajiner asli $\pm i\beta$ maka titik asalnya stabil tak asimtotik.
4. dalam dua dimensi, jika nilai eigen bernilai nol, dan yang lainnya negative maka titik asalnya stabil tak asimtotik.

Analisis kestabilan hanya dapat dilakukan pada sistem persamaan diferensial biasa linier. Menurut Boyce dan Di Prima (2000) apabila didapat suku non-linier maka perlu dilakukan linierisasi di sekitar titik tetapnya dengan deret Taylor. Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial non linier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier. Suatu sistem dimana f dan g adalah nonlinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier di sekitar titik tetap (x^*, y^*) dan menghilangkan suku non liniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Pada keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0$, $g(x^*, y^*) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dimana } A_0 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$$

Dimana A_0 pada $x = x^*, y = y^*$. Matriks tersebut disebut matriks Jacobian (Boyce dan DiPrima, 2000).

2.4 Potret Fase

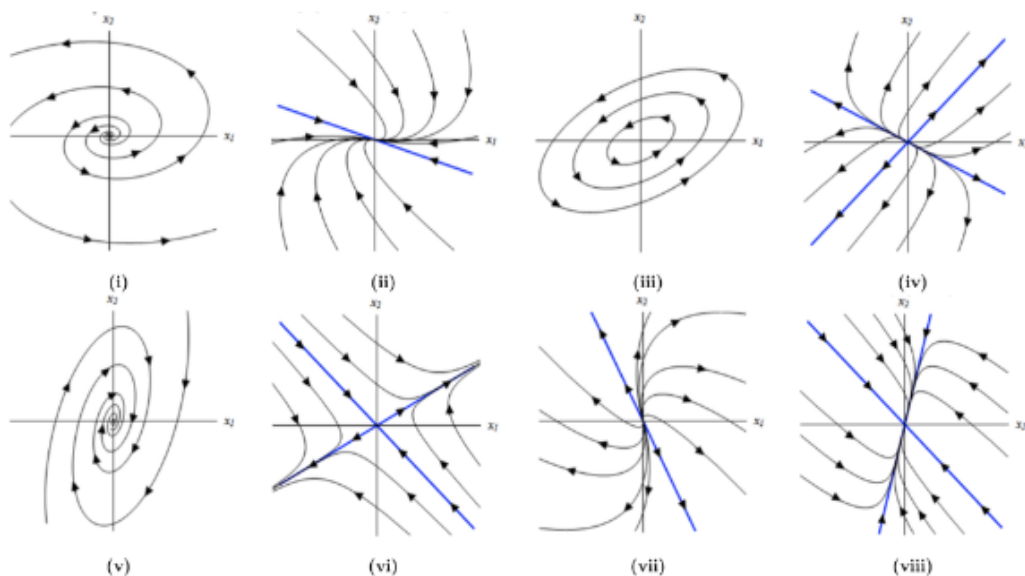
Potret fase dari sistem adalah gambar semua trayektori dari sistem (Hariyanto, 1992). Trayektori sendiri merupakan gambar dari solusi partikular dalam suatu bidang fase. Lebih jelasnya menurut Perko (2000) potret fase dari sistem persamaan diferensial adalah himpunan dari semua kurva solusi dari sistem persamaan dalam ruang fase R^n . Dengan melihat trayektori dari solusi, maka dapat diketahui apakah solusi akan mendekati titik ekuilibrium atau tidak saat seiring bertambahnya waktu (Dawkins, 2007).

Adapun hubungan antara nilai eigen dan jenis kestabilan dapat dilihat pada Tabel 2.1 sebagai berikut:

No.	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
1.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-	-
2.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
3.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
4.	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Tidak Stabil	Saddle/Pelana
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
7.	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}$	-	-
8.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
9.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
10.	$a = 0$	Stabil	Center/Terpusat

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Dinamik Linier (Boyce & DiPrima, 2000)

Sedangkan berikut adalah jenis kestabilan yang disajikan dalam bentuk gambar:



Gambar 2. 2. (i) Node Spiral Tidak Stabil, (ii) Node Stabil Asimtotik, (iii) Node Center Stabil, (iv) Node Tidak Stabil Asimtotik, (v) Node Spiral Stabil, (vi) Node Saddle Tidak Stabil, (vii) Node Tidak stabil, (viii) Node Stabil Asimtotik (Dawkins, 2007)

Berdasarkan Gambar 2.2 dapat diketahui bahwa pada jenis kestabilan node stabil spiral dan stabil asimtotik lintasan bergerak menuju titik kesetimbangannya seiring bertambahnya waktu (t). Sedangkan pada node tidak stabil spiral maupun tidak stabil asimtotik seiring bertambahnya waktu (t) lintasan bergerak menjauh dari titik kesetimbangannya. Namun pada node center yang selalu stabil lintasan hanya akan bergerak disekitar titik kesetimbangan tanpa benar-benar bergerak menuju ke arahnya (Dawkins, 2007).

2.5 Kajian Keagamaan

Kestabilan atau keseimbangan telah banyak dibahas dalam Al-Quran. Salah satunya terdapat pada surat al-Mulk/67:3, yaitu: *“yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sama sekali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?”*

Menurut Rifa'i dalam buku Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir (2012) terdapat dua pandangan pada firman Allah *“yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis”* yakni, apakah langit-langit tersebut sambung menyambung dimana sebagiannya berada di atas sebagian yang lain atau terpisah oleh suatu ruang hampa. Dalam hal ini yang paling kuat ialah pendapat yang kedua sebagaimana yang telah ditegaskan oleh hadits isra Nabi SAW. Kemudian firman Allah *“Kamu sama sekali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang”* menunjukkan bahwa tidak ada ikhtilaf, kesimpangsiuran, pertentangan, kekurangan, aib, dan cacat dalam penciptaannya. Itulah mengapa Allah SWT melanjutkan firman-Nya *“Maka lihatlah berulang-ulang, adakah*

kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?” yaitu lihatlah ke langit kemudian renungkanlah apakah terdapat aib, cacat, atau keretakan disana.

Kata *“tujuh langit”* dipahami sementara oleh ulama sebagai planet-planet yang mengitari tata surya selain bumi, karena itulah yang setidaknya dapat dijangkau oleh pandangan mata serta pengetahuan manusia saat Al-Quran diturunkan. Ayat tersebut dapat dipahami lebih umum dari itu, mengingat angka *“tujuh”* merupakan angka yang dapat menggantikan kata *“banyak”*. Tujuh langit tersebut beredar dengan serasi dan seimbang sehingga tidak terjadi tabrakan antar satu sama lain. Langit tersebut bersusun selayaknya kue lapis, dimana tidak ada lapisan yang lebih panjang atau lebih lebar, semuanya tersusun dengan rapi. Hal ini tidak dapat terjadi, jika bumi tidak berbentuk bulat dan langit dunia mengitarinya, bagaikan kulit telur yang mengitari telur dari seluruh seginya. Kemudian terdapat langit kedua yang mengitari langit dunia, begitu pula seterusnya sampai kepada ‘Arsy yang mengitari segala sesuatu (Shihab, 2005).

Keseimbangan-keseimbangan yang lain juga terdapat pada berbagai ayat dalam Al-Quran diantaranya pada surat an-Naba/78:10-11 yaitu: *“dan Kami menjadikan siang untuk mencari penghidupan, dan Kami menjadikan malam sebagai pakaian”*. Ayat tersebut menjelaskan tentang pergantian siang dan malam sebagai contoh bentuk keseimbangan dari gelap dan terang. Keseimbangan yang lain terdapat pada surat al-Infithar/82:7 yaitu: *“Yang telah menciptakanmu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang.”* Pada ayat tersebut menjelaskan tentang keseimbangan dalam penciptaan tubuh manusia sehingga manusia dapat menjadi makhluk ciptaan Allah SWT yang

sempurna. Maha besar Allah SWT yang menciptakan dunia dan segala isinya, yang tiada ditemukan ketidakseimbangan di dalamnya.

BAB III PEMBAHASAN

Berlandaskan uraian dan landasan teori pada Bab II, maka pada Bab ini penulis akan membahas mengenai langkah-langkah analisis kestabilan model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

3.1 Reduksi Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*

Pada bab ini akan dipaparkan mengenai reduksi terhadap model matematika dari vibrasi dawai pada *flying fox*. Model Matematika tersebut berbentuk persamaan diferensial biasa orde dua tak linier, sehingga perlu dilakukan reduksi dan linierisasi agar persamaan menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu yang linier. Selanjutnya, pada Bab 3.2 dianalisis kestabilan menggunakan kaidah dinamik. Kaidah dinamik meliputi analisis titik kesetimbangan, mencari nilai eigen, kemudian melakukan analisa potret fase. Terakhir, pada bab 3.3 dibahas mengenai integrasi penelitian ini dalam islam.

Sebelum menyelesaikan analisis kestabilan, berikut ialah model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang disusun oleh Kusumastuti, dkk (2017):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d} \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t \quad (3.2)$$

Model matematika vibrasi dawai *flying fox* berbentuk persamaan diferensial biasa orde dua, agar dapat diolah olah maka perlu dilakukan reduksi

agar persamaan berubah menjadi persamaan diferensial biasa orde satu. Dengan memandang model vibrasi dawai *flying fox* pada persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

Reduksi dilakukan dengan memisalkan $y = y_1$ dan $\frac{dy_1}{dt} = y_2$, maka diperoleh:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy_1}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (y_2) = \frac{dy_2}{dt}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\delta_1 y_2 - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

Reduksi yang telah dilakukan menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa orde satu yakni:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 & (3.3) \\ \frac{dy_2}{dt} = -\delta_1 y_2 - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d} & (3.4) \end{cases}$$

Selanjutnya, dengan memandang model vibrasi dawai *flying fox* pada persamaan (3.2) sebagai berikut:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t$$

Reduksi dilakukan dengan memisalkan: $\theta = \theta_1$ dan $\frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2$, maka diperoleh:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\theta_2) = \frac{d\theta_2}{dt}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_2 \theta_2 - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta_1}{(\cos \theta_1)^3} \right) + 0,05 \sin t$$

Reduksi yang telah dilakukan menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa orde satu tak linier sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_2\theta_2 - \frac{6k}{m_d} \left(\frac{\sin \theta_1}{(\cos \theta_1)^3} \right) + 0,05 \sin t \end{cases} \quad (3.6)$$

Berdasarkan analisis sistem persamaan diferensial biasa orde dua pada persamaan (3.1) dan (3.2), telah berubah menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu.

3.2 Linierisasi Model Matematika Vibrasi dawai Fying Fox

Suku tak linier hanya terdapat pada persamaan (3.6) yaitu: $\frac{\sin \theta_1}{(\cos \theta_1)^3}$, sehingga perlu dilakukan linierisasi agar suku tersebut menjadi linier. Linierisasi dilakukan dengan cara suku $\frac{\sin \theta_1}{(\cos \theta_1)^3}$ diekspansi menggunakan deret Taylor disekitar $\theta = 0$ dengan pemotongan pada turunan pertama sehingga diperoleh:

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \rightarrow f(0) = \frac{\sin 0}{(\cos 0)^3} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^4 \theta} \rightarrow f'(0) = \frac{3 \sin^2 0 + \cos^2 0}{\cos^4 0} = \frac{3 \cdot 0 + 1}{1} = 1$$

$$f(\theta) \approx f(0) + \frac{f'(0)(\theta - 0)}{1!}$$

$$\approx 0 + \frac{1(\theta)}{1!}$$

$$\approx \theta$$

$$\frac{\sin \theta_1}{(\cos \theta_1)^3} \approx \theta$$

Sehingga persamaan (3.6) menjadi:

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_2\theta_2 - \frac{6k}{m_d}(\theta_1) + 0,05 \sin t \quad (3.7)$$

Dengan demikian persamaan diferensial biasa nonlinier telah berubah menjadi persamaan diferensial biasa linier.

3.3 Analisis Kestabilan Model Matematika Vibrasi dawai *Flying Fox*

Analisis Kestabilan dilakukan menggunakan kaidah dinamik. Terdapat beberapa tahapan dalam kaidah dinamik yakni: analisis titik kesetimbangan, analisis nilai eigen, dan analisis potret fase. Kestabilan suatu sistem dapat diamati berdasarkan nilai eigen dan potret fasenya. Jika nilai eigen bernilai negatif, maka arah vektor eigen dalam potret fase akan menuju ke titik kesetimbangan, sehingga sistem tersebut dapat dikatakan stabil. Sebaliknya, apabila nilai eigen bernilai positif maka arah vektor eigen dalam potret fase akan menjauh dari titik kesetimbangan, sehingga sistem tersebut dikatakan tidak stabil.

3.3.1 Analisis Titik Kesetimbangan

Titik tetap secara matematis didefinisikan sebagai berikut: $(x^*, y^*) \ni f(x^*, y^*) = 0$. Sedangkan titik kesetimbangan adalah suatu titik dimana $\frac{dy}{dx} = 0$. Artinya perubahan y terhadap x bernilai nol (tidak ada perubahan). Tidak adanya perubahan inilah yang mengakibatkan sistem tersebut berada dalam kondisi setimbang. Berdasarkan sistem persamaan yang terdiri atas persamaan (3.3), (3.4), (3.5), dan (3.7) diperoleh titik kesetimbangan yaitu:

3.3.1.1 Analisis titik tetap pada persamaan (3.3)

Dimisalkan $\frac{dy_1}{dt} = 0$. Karena $\frac{dy_1}{dt} = y_2$, maka $y_2 = 0$. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari persamaan (3.3) ialah $E_1 = (y_1, y_2) = (0, 0)$

3.3.1.2 Analisis titik tetap pada persamaan (3.4)

Dimisalkan $y_2 = 0$, maka $\frac{dy_2}{dt} = 0$. Karena $\frac{dy_2}{dt} = -\delta_1 y_2 - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$,

maka:

$$\begin{aligned} 0 &= -\delta_1 y_2 - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d} \\ \delta_1 y_2 &= -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d} \\ y_2 &= -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{\delta_1 m_d L} + \frac{m_b g}{\delta_1 m_d} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Karena $y_2 = 0$ maka diperoleh y_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{\delta_1 m_d L} + \frac{m_b g}{\delta_1 m_d} \\ \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{\delta_1 m_d L} &= \frac{m_b g}{\delta_1 m_d} \\ (\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1(m_d \delta_1) &= m_b g (m_d \delta_1 L) \\ y_1 &= \frac{(m_b)(g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari persamaan (3.4) yaitu $E_2 =$

$$(y'_1, y'_2) = \left(\frac{(m_b)(g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}, 0 \right).$$

3.3.1.3 Analisis titik tetap pada persamaan (3.5)

Dimisalkan $\theta_1 = 0$, maka $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$. Karena $\frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2$, maka $\theta_2 = 0$. Sehingga

diperoleh titik kesetimbangan dari persamaan (3.5) yakni $E_3 = (\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$.

3.3.1.4 Analisis titik tetap pada persamaan (3.7)

Dimisalkan $\theta_2 = 0$, maka $\frac{d\theta_2}{dt} = 0$. Karena $\frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_2\theta_2 - \frac{6k}{m_d}(\theta_1) + 0,05 \sin t$,

maka:

$$0 = -\delta_2\theta_2 - \frac{6k}{m_d}(\theta_1) + 0,05 \sin t$$

$$\delta_2\theta_2 = -\frac{6k}{m_d}(\theta_1) + 0,05 \sin t$$

$$\theta_2 = -\frac{6k}{m_d\delta_2}(\theta_1) + \frac{0,05 \sin t}{\delta_2}$$

Jika $\theta_2 = 0$, maka

$$0 = -\frac{6k}{m_d\delta_2}(\theta_1) + \frac{0,05 \sin t}{\delta_2}$$

$$\frac{6k}{m_d\delta_2}(\theta_1) = \frac{0,05 \sin t}{\delta_2}$$

$$6k(\theta_1) = \frac{(0,05 \sin t) (m_d)(\delta_2)}{\delta_2}$$

$$\theta_1 = \frac{(0,05 \sin t) (m_d)}{6k}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari persamaan (3.7) yaitu $E_4 =$

$(\theta_1, \theta_2) = (\frac{(0,05 \sin t) (m_d)}{6k}, 0)$. Berdasarkan analisis menyeluruh terhadap sistem

persamaan yang terdiri atas persamaan (3.3), (3.4), (3.5), dan (3.7) diperoleh titik

kesetimbangan yaitu:

$$E_1 = (y_1, y_2) = (0,0)$$

$$E_2 = (y'_1, y'_2) = \left(\frac{(m_b)(g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}, 0 \right)$$

$$E_3 = (\theta_1, \theta_2) = (0,0)$$

$$E_4 = (\theta'_1, \theta'_2) = \left(\frac{(0,05 \sin t) (m_d)}{6k}, 0 \right)$$

3.3.2 Analisis Nilai Eigen

Terdapat dua sistem persamaan. Sistem pertama ialah sistem yang terbentuk dari persamaan (3.3) dan (3.4) mengenai perubahan kecepatan gerak osilasi dawai terhadap waktu. Sistem kedua terbentuk dari persamaan (3.5) dan (3.7) mengenai perubahan kecepatan gerak osilasi sudut terhadap waktu.

3.3.2.1 Analisis nilai eigen dari persamaan (3.3) dan (3.4)

persamaan (3.3) dan (3.4) dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\delta_1 y_2 - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y_1}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

Dari sistem persamaan tersebut dapat diperoleh matriks Jacobi yaitu

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & -\delta_1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen (λ) yakni

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & -\delta_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & -\delta_1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\
& -\lambda(-\delta_1 - \lambda) + \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} = 0 \\
& \lambda^2 + \lambda\delta_1 + \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} = 0 \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan mencari nilai akar-akar dari λ . Merujuk pada persamaan (3.9) dapat diketahui $a = 1$, $b = \delta_1$, dan $c = \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}$. Sehingga nilai eigen (λ) ialah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 - \frac{4(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\delta_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta_1^2 - \frac{4(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}
\end{aligned}$$

Berdasarkan analisis diatas diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\delta_1^2 - \frac{4(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}} \text{ dan } \lambda_2 = -\frac{1}{2}\delta_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta_1^2 - \frac{4(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}.$$

Dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang telah diberikan oleh Kusumastuti, dkk (2017), menghasilkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 - \frac{4(2124)}{100000}} \\
&= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10000} - \frac{(2124)}{25000}} \\
&= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25 - (2124)}{250000}} \\
&= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{500}\right)\sqrt{-21215} \\
&= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{1000}i\sqrt{21215} \\
&= -0,005 \pm 0,14565i
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen kompleks yakni $\lambda_1 = -0,005 + 0,14565i$ dan $\lambda_2 = -0,005 - 0,14565i$.

3.3.2.2 Analisis nilai eigen dari persamaan (3.5) dan (3.7)

Persamaan (3.5) dan (3.7) dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_2\theta_2 - \frac{6k}{m_d}(\theta_1) + 0,05 \sin t$$

Matriks Jacobi dari sistem persamaan tersebut yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6k}{m_d} & -\delta_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen (λ) yakni

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6k}{m_d} & -\delta_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\
\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{6k}{m_d} & -\delta_2 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\
-\lambda(-\delta_2 - \lambda) + \frac{6k}{m_d} &= 0 \\
\lambda^2 + \lambda\delta_2 + \frac{6k}{m_d} &= 0 \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan mencari nilai akar-akar dari λ . Merujuk pada persamaan (3.10) dapat diketahui $a = 1, b = \delta_2$, dan $c = \frac{6k}{m_d}$. Sehingga nilai eigen (λ) ialah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{3,4} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-\delta_2 \pm \sqrt{\delta_2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{6k}{m_d}}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-\delta_2 \pm \sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}}}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\delta_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}}
\end{aligned}$$

Berdasarkan analisis diatas diperoleh nilai eigen $\lambda_3 = -\frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}}$ dan

$\lambda_4 = -\frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}}$. Dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang

telah diberikan oleh Kusumastuti, dkk (2017), menghasilkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{3,4} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}} \\
 &= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^2 - \frac{207,711}{50}} \\
 &= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 - 41542,2}{10000}} \\
 &= -\frac{1}{200} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right)\sqrt{-41541,2} \\
 &= -0,005 \pm \frac{1}{200}(203,816584)i \\
 &= -0,005 \pm 1,01908292i
 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen kompleks yakni $\lambda_3 = -0,005 + 1,01908292i$

dan $\lambda_4 = -0,005 - 1,01908292i$

3.4 Potret Fase

Potret fase merupakan diagram sekaligus medan arah yang dapat membantu menganalisis kestabilan suatu sistem. Dalam penelitian ini model matematika vibrasi dawai *flying fox* direduksi menjadi dua sistem persamaan yaitu:

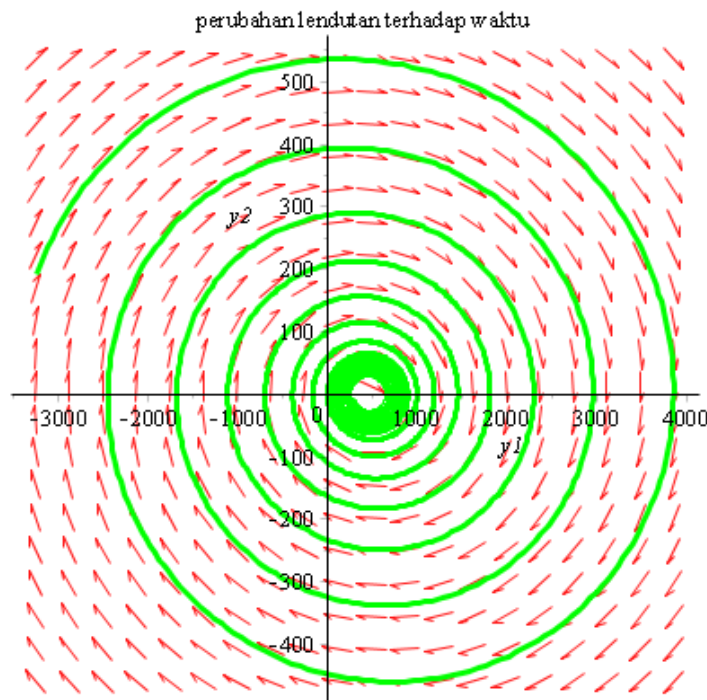
1. Sistem persamaan pertama terdiri atas dua persamaan yakni persamaan (3.3) dan (3.4). Persamaan ini membahas tentang perubahan kecepatan osilasi dawai terhadap waktu. Dengan mensubstitusikan parameter-

parameter yang telah diberikan oleh Kusumastuti, dkk (2017), maka persamaan (3.3) dan (3.4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dt} = -\frac{1}{100}y_2 - \frac{2124y_1}{100000} + \frac{98}{10} \end{cases} \quad (3.12)$$

Persamaan (3.11) dan (3.12) menghasilkan nilai eigen kompleks yaitu Diperoleh nilai eigen kompleks yakni $\lambda_1 = -0,005 + 0,14565i$ dan $\lambda_2 = -0,005 - 0,14565i$. Berikut diberikan grafik potret fase dari sistem persamaan pertama:



Gambar 3. 1 Potret fase perubahan kecepatan lendutan dawai terhadap waktu.

Pada Gambar 3.1 terlihat bahwa untuk nilai eigen kompleks dengan bagian bilangan real nya bernilai negatif, maka akan membentuk potret fase berbentuk spiral. Dengan medan arah bergerak menuju titik kesetimbang

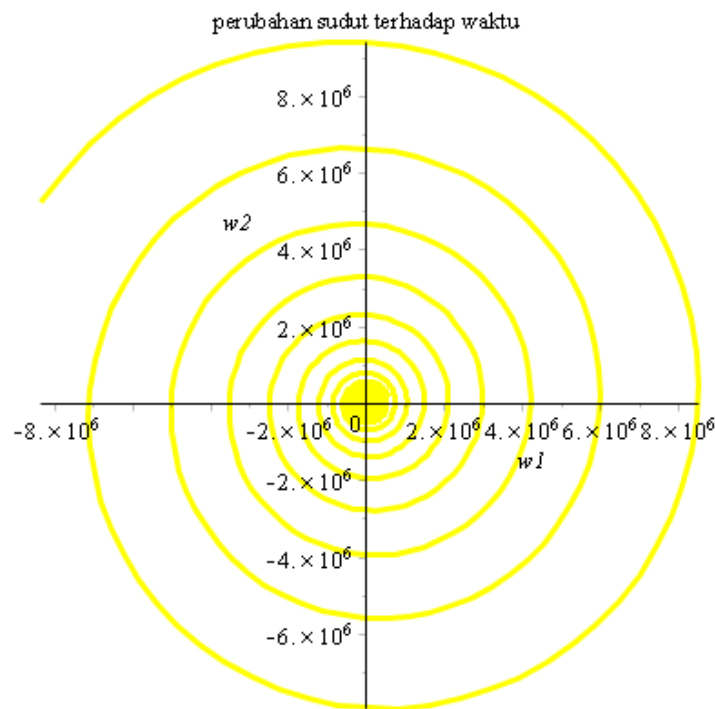
yaitu $E_1 = (y_1, y_2) = (0,0)$, jelas bahwa suatu sistem tersebut stabil asimtotik.

2. Sistem persamaan kedua terdiri atas dua persamaan yakni persamaan (3.5) dan (3.7). Persamaan ini membahas tentang perubahan kecepatan osilasi sudut terhadap waktu. Dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang telah diberikan oleh Kusumastuti, dkk (2017), maka persamaan (3.5) dan (3.7) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{1}{100}\theta_2 - \frac{51,92775}{50}\theta_1 + 0,05 \sin t \end{cases} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.13) dan (3.14) menghasilkan nilai eigen kompleks yaitu $\lambda_3 = -0,005 + 1,01908292i$ dan $\lambda_4 = -0,005 - 1,01908292i$. Berikut diberikan grafik potret fase dari sistem persamaan kedua:



Gambar 3. 2 Potret fase perubahan kecepatan sudut dawai terhadap waktu.

Pada Gambar 3.2 grafik menunjukkan bentuk spiral. Walaupun tidak muncul medan arahnya, namun dengan mengetahui nilai eigennya kompleks dengan bagian bilangan real nya bernilai negatif, maka jelas bahwa suatu sistem tersebut bersifat stabil asimtotik.

3.5 Kajian Integrasi

Analisis kestabilan dapat menjadi sarana dalam mengamati dan mempelajari kestabilan atau keseimbangan-keseimbangan dalam alam semesta. Seperti firman Allah SWT pada surat Al-Mulk ayat 3 dan 4 yaitu: *“yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sama sekali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan*

tidak menemukan sesuatu cacat dan pengelihatannya itu pun dalam keadaan payah”. Ayat tersebut menjelaskan betapa Allah SWT menciptakan dunia dan segala isinya dengan presisi, dan seimbang tanpa cela. Allah SWT mempersilahkan manusia untuk melihat berulang-ulang terhadap ciptaanNya, niscaya dengan pengelihatannya yang payah dan berulang-ulang kalipun manusia tidak akan menemui sesuatu yang tidak seimbang.

Dalam penelitian ini, kestabilan yang dianalisis merupakan sebuah perilaku stabil atau tidaknya vibrasi yang terjadi pada dawai *flying fox*. Melalui analisis ini didapatkan bahwa perilaku dawai yang stabil merupakan contoh kecil keseimbangan yang ada di alam semesta, sekaligus sebagai bagian kecil pembuktian bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu di dunia ini dengan seimbang atau stabil.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan mengenai analisis kestabilan terhadap model matematika vibrasi dawai *flying fox* dapat diperoleh hasil sebagai berikut: Persamaan pertama dari model matematika vibrasi dawai *flying fox* yakni

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d},$$
 menghasilkan nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\delta_1^2 - \frac{4(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}$ dan $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\delta_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta_1^2 - \frac{4(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}$. Sedangkan

pada persamaan kedua yakni $\frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_2\theta_2 - \frac{6k}{m_d}(\theta_1) + 0,05 \sin t$, menghasilkan

$$\text{nilai eigen } \lambda_3 = -\frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}} \text{ dan } \lambda_4 = -\frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta_2^2 - \frac{24k}{m_d}}.$$

Substitusi yang dilakukan berdasarkan parameter-parameter yang telah diberikan Kusumastuti, dkk (2017) menghasilkan nilai eigen kompleks sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0,005 + 0,14565i, \quad \lambda_2 = -0,005 - 0,14565i, \quad \lambda_3 = -0,005 + 1,01908292i, \text{ dan } \lambda_4 = -0,005 - 1,01908292i.$$

Nilai eigen kompleks dengan bagian bilangan real bernilai negatif, menghasilkan grafik potret fase berbentuk spiral dengan vektor eigen yang mengarah menuju titik setimbangnya. Dengan demikian persamaan tersebut dapat dikatakan stabil asimtotik. Sehingga model matematika vibrasi dawai *flying fox* dapat disimpulkan sebagai model matematika yang valid mendekati keadaan sebenarnya.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melakukan analisis perilaku untuk model matematika vibrasi dawai *flying fox* dengan variasi massa beban.

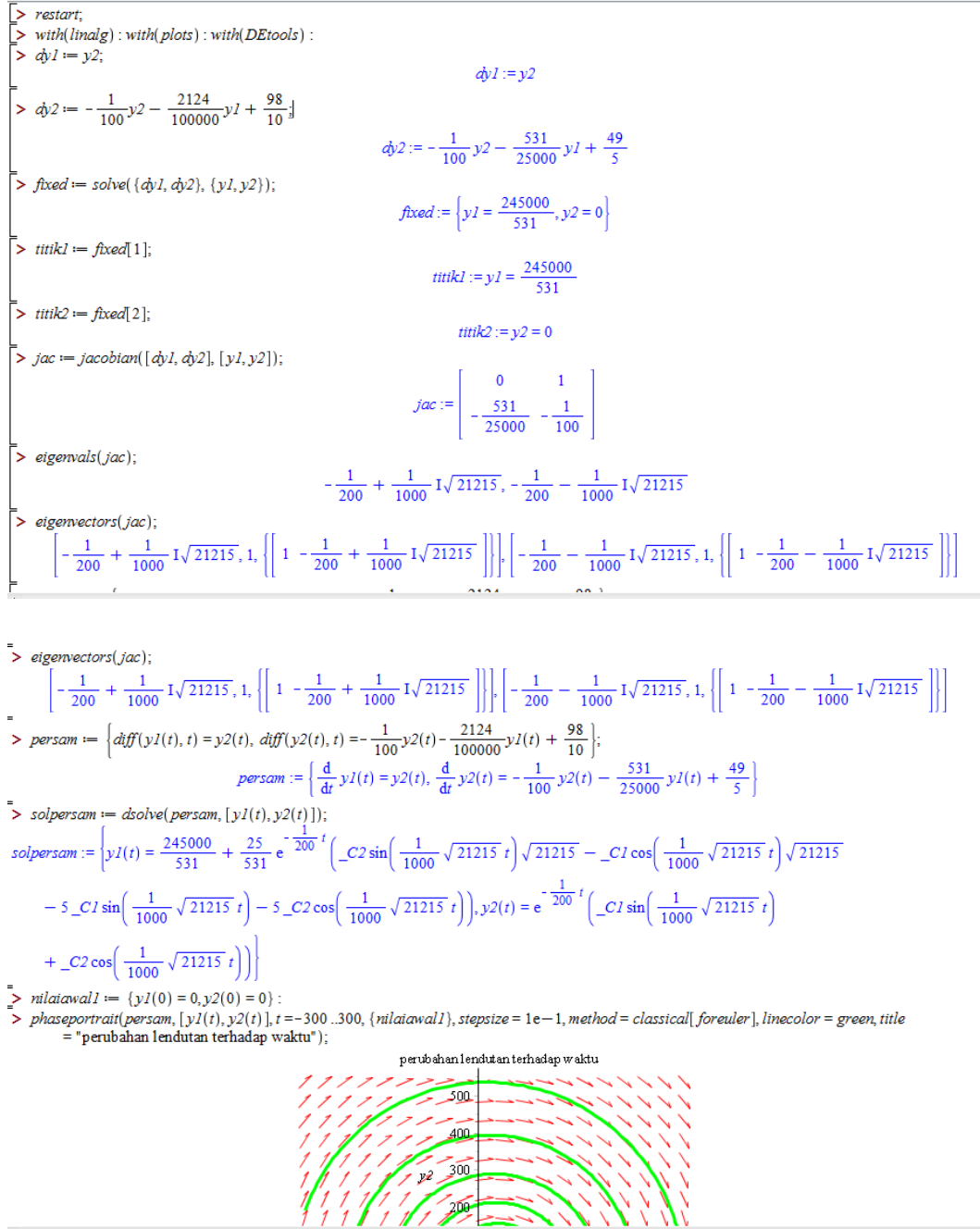
DAFTAR RUJUKAN

- Anton, H. Dan Rorres, C. 2004, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Jilid I*. Jakarta: Erlangga.
- Billcok, Rachael M, dkk. 2015. Zipline-Related injuries treated in US Eds, 1997-2012. *The American Journal of Emergency Medicine*.
- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C.. 2000. *ODE Architect Companion*. New York: John Willy and sons, Inc.
- Dawkins, P. 2007. *Differential Equations*. (Online), (http://https://tutorial.math.lamar.edu/pdf/de/de_complete.pdf), diakses 15 Agustus 2020.
- Guo, Yunhui, dkk. 2021. Reliability Analysis of Zipline Project in A Mountainous Eco-tourism Scenic Spot. *Journal of Physics*.
- Hariyanto. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa; Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kusumastuti, Ari, dkk. 2017. Construction of Mathematical Modelling of *Flying Fox* String Vibration. *Jurnal Teknologi*.
- Maubrani, Ericolion. 2014. *Sistem Hasil Kali Persamaan Diferensial Otonomus pada Bidang*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: UNY.
- Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling*. Malang: UIN Malang Press.
- Perko, L. 2000. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Arizona: Springer.
- Prayudi. (2006). *Matematika Teknik Edisi Pertama*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Purcell, E. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Rifa'i, M. N. 2012. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta: Gema Insani.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical System Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education. Inc.
- Ross, Sheply L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. New York: John Willey&Sons.Inc
- Sari, Dian Maulidiya. 2018. *Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah (Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Quran)*. Jakarta: Lentera hati.

Tu, P.N.V..1994. *Dynamical System an Introduction with Application in Economicsand Biology*. New York: Springer-verlag.

LAMPIRAN

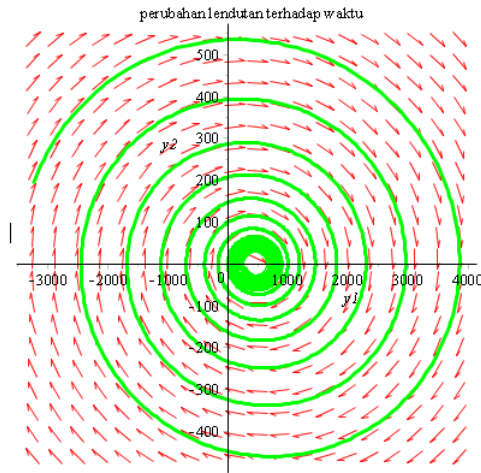
1. Perubahan kecepatan lendutan dawai terhadap waktu



```

> nilaiawal := [y1(0) = 0, y2(0) = 0]:
> phaseportrait(persam, [y1(t), y2(t)], t = -300..300, {nilaiawal}, stepsize = 3e-1, method = classical[foreuler], linecolor = green, title
= "perubahan lendutan terhadap waktu");

```



2. Perubahan kecepatan sudut dawai terhadap waktu

```

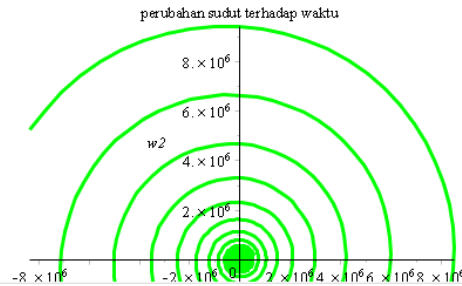
> restart;
> with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
> dw1 := w2;
                                     dw1 := w2
> dw2 := -1/100*w2 - 51.92775/50*w1 + 5/100*sin(t);
                                     dw2 := -1/100*w2 - 1.038555000*w1 + 1/20*sin(t)
> fixed := solve({dw1, dw2}, {w1, w2});
                                     fixed := {w1 = 0.04814381520 sin(t), w2 = 0.}
> jac := jacobian([dw1, dw2], [w1, w2]);
                                     jac := [ 0      1
                                              -1.038555000 -1/100 ]
> eigenvals(jac);
                                     -0.005000000000000000 + 1.01908292106187 I, -0.005000000000000000 - 1.01908292106187 I
> eigenvectors(jac);
[ -0.005000000000000000 - 1.019082921 I, 1, [ [ 0.9812507965 + 0.004814381520 I 0. - 1. I ] ] ], [ -0.005000000000000000 + 1.019082921 I, 1,
[ [ 0.9812507965 - 0.004814381520 I 0. + 1. I ] ] ]
> persam := {diff(w1(t), t) = w2(t), diff(w2(t), t) = -1/100*w2(t) - 51.92775/50*w1(t) + 5/100*sin(t)};
                                     persam := { d/dt w1(t) = w2(t), d/dt w2(t) = -1/100*w2(t) - 1.038555000*w1(t) + 1/20*sin(t) }
> solpersam := dsolve(persam, [w1(t), w2(t)]);
solpersam := [ w1(t) = -1000/207711 * e^(-1/200*t) * sin(1/1000*sqrt(1038530)*t) _C2 - 200/207711 * e^(-1/200*t) * cos(1/1000*sqrt(1038530)*t) * sqrt(1038530) _C2

```

```

> solpersam := dsolve(persam, [w1(t), w2(t)]);
solpersam := {w1(t) = -\frac{1000}{207711} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{1000} \sqrt{1038530} t\right) -C2 - \frac{200}{207711} e^{-\frac{1}{200}t} \cos\left(\frac{1}{1000} \sqrt{1038530} t\right) \sqrt{1038530} -C2
- \frac{1000}{207711} e^{-\frac{1}{200}t} \cos\left(\frac{1}{1000} \sqrt{1038530} t\right) -C1 + \frac{200}{207711} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{1000} \sqrt{1038530} t\right) \sqrt{1038530} -C1 - \frac{20000000}{63459521} \cos(t)
+ \frac{77110000}{63459521} \sin(t), w2(t) = e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{1000} \sqrt{1038530} t\right) -C2 + e^{-\frac{1}{200}t} \cos\left(\frac{1}{1000} \sqrt{1038530} t\right) -C1 + \frac{20000000}{63459521} \sin(t)
+ \frac{77110000}{63459521} \cos(t)}
> nilaiawal := {w1(0) = 0, w2(0) = 0};
nilaiawal := {w1(0) = 0, w2(0) = 0}
> phaseportrait(persam, [w1(t), w2(t)], t = -300 .. 300, {nilaiawal}, stepsize = 1e-1, method = classical[foreuler], linecolor = green, title
= "perubahan sudut terhadap waktu");

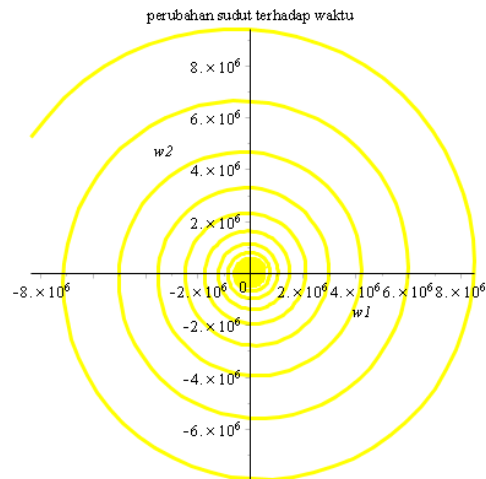
```



```

=
> nilaiawal := [w1(0) = 0, w2(0) = 0]:
> phaseportrait(persam, [w1(t), w2(t)], t = -300 .. 300, {nilaiawal}, stepsize = 1e-1, method = classical[foreuler], linecolor = yellow, title
= "perubahan sudut terhadap waktu");

```



DAFTAR RIFAYAT HIDUP

Soimatul Makfiroh, lahir di Malang pada tanggal 27 September 1998. Anak sulung dari 2 bersaudara yakni dari pasangan Bapak Suprpto dan Ibu Muriati.



Perempuan yang akrab disapa ima ini telah menempuh Pendidikan formal mulai dari TK Siwi Pertiwi selama dua tahun dan lulus pada tahun 2004. Lalu melanjutkan pendidikan dasar selama 6 tahun di SDN Pisang Candi IV dan lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMPN 15 Malang dan lulus pada tahun 2013 serta melanjutkan sekolah pada pendidikan menengah atas di SMAN 7 Malang lulus dan pada tahun 2016. Kemudian pada tahun 2016 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAUALANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Soimatul Makfiroh
NIM : 16610051
Fakultas/Program studi: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model Matematika Vibrasi Dawai
Flying Fox
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	4 Februari 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2	5 Februari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	2.
3	7 Februari 2020	Revisi Bab I, Bab II, dan konsultasi Bab III	3.
4	10 Februari 2020	Revisi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	4.
5	9 Oktober 2020	Konsultasi Bab III, dan Bab IV	5.
6	15 Oktober 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan & Kepenulisan pada Bab II	6.
7	16 November 2020	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV, Bab V dan Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	7.
8	30 Maret 2020	Konsultasi Keseluruhan	8.
9	5 April 2020	Revisi Keseluruhan	9.
10	15 April 2021	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 15 April 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001